

Естественные науки

УДК 514.76

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: glasirina@mail2000.ru

Рассмотрены отображения двумерных плоскостей L_1^1 и L_2^1 инвариантным образом связанных с распределением двумерных плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве. Каждое из отображений определяется двумя соответствующими функциями двух аргументов. Поэтому для их изучения привлекаются гармонические функции и известные условия Коши-Римана. Все рассмотрения носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими.

1. Аналитический аппарат

Обозначения и терминология в данной статье соответствуют принятым в [1–7].

Рассматривается четырехмерное евклидово пространство E_4 , отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R = \{\bar{A}, \bar{e}_i\} (i, j, k, l = \overline{1, 4})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$\begin{aligned} d\bar{A} &= \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_i^k \bar{e}_k, \\ D\omega^k &= \omega^j \wedge \omega_j^k, \quad D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь 1-формы ω_i^k удовлетворяют соотношениям

$$\omega_i^k + \omega_k^i = 0, \quad (1.2)$$

вытекающим из условия ортонормальности репера R :

$$(\bar{e}_i; \bar{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.3)$$

В пространстве E_4 зададим распределение

$$\Delta_{2,4}^1: M \rightarrow L_2^1,$$

где M – текущая точка пространства E_4 , а L_2^1 – двумерная плоскость, проходящая через эту точку. Присоединим к распределению ортонормальный репер R так, чтобы

$$M = A, L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}} = 0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = 3, 4. \quad (1.4)$$

Здесь и в дальнейшем символом $L_s = (\bar{A}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s) (s < 4)$ обозначается s -мерная плоскость

(s -плоскость), проходящая через точку A параллельно линейно-независимым векторам $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s$, а величины $x^{\hat{\alpha}}$ означают локальные точечные координаты относительно репера R . Из (1.4) и (1.1) следует, что дифференциальные уравнения распределения $\Delta_{2,4}^1: M \rightarrow L_2^1$ в E_4 можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\alpha}} &= A_{\hat{\alpha}i}^{\hat{\alpha}} \omega^i \Rightarrow \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} = -\omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} = A_{\hat{\alpha}i}^{\hat{\beta}} \omega^i \Rightarrow A_{\hat{\alpha}i}^{\hat{\alpha}} - A_{\hat{\alpha}i}^{\hat{\beta}}, \\ dA_{\hat{\alpha}i}^{\hat{\alpha}} - A_{\hat{\beta}i}^{\hat{\alpha}} \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} - A_{\hat{\beta}i}^{\hat{\alpha}} \omega_i^{\hat{\alpha}} + A_{\hat{\alpha}i}^{\hat{\beta}} \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} &= A_{\hat{\alpha}ij}^{\hat{\alpha}} \omega^j, \quad A_{\hat{\alpha}i}^{\hat{\alpha}} = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$. Из (1.3) и (1.4) следует, что с распределением $\Delta_{2,4}^1: M \rightarrow L_2^1$ в E_4 ассоциируется распределение

$$\Delta_{2,4}^2: A \rightarrow L_2^2 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4) \perp L_2^1. \quad (1.6)$$

Здесь плоскость $L_2^2 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4) \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}} = 0$ в точке $A \in E_4$ будет оснащающей в смысле [2] или нормальной в смысле [3] плоскостью распределения $\Delta_{2,4}^1$.

Замечание 1.1. Из (1.3–1.6) в силу (1.1) следует, что интегральные кривые [2] распределений $\Delta_{2,4}^1: M \rightarrow L_2^1$ и $\Delta_{2,4}^2: M \rightarrow L_2^2$, описываемые точкой $A \in E_4$ с касательными, принадлежащими L_2^1 и L_2^2 , определяются соответственно уравнениями:

$$\Delta_{2,4}^1: \omega^{\hat{\alpha}} = 0; \Delta_{2,4}^2: \omega^{\alpha} = 0. \quad (1.7)$$

Эти дифференциальные уравнения в силу (1.1) и (1.5) будут вполне интегрируемыми, т.е. распределения $\Delta_{2,4}^1$ и $\Delta_{2,4}^2$ будут инволютивными или голономными [2], тогда и только тогда, когда соответственно:

$$\Delta_{2,4}^1: A_{[\hat{\alpha}\hat{\beta}]}^{\hat{\alpha}} = 0; \Delta_{2,4}^2: A_{[\alpha\beta]}^{\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2; \hat{\alpha} = 3, 4). \quad (1.8)$$

2. Отображения f_α и φ_α плоскостей L_1^1 и L_2^1

2.1. Квадратичные отображения

В каждой точке $A \in E_4$ можно получить нижеследующие отображения плоскостей L_1^1 и L_2^1 , определяемые двумя соответствующими квадратичными функциями двух аргументов:

$$\begin{aligned} f_1: y^{\hat{\alpha}} &= B_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} x^{\alpha} x^{\beta}; f_2: y^{\alpha} = B_{\alpha\beta}^{\alpha} x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}}; \\ \varphi_1: y^{\hat{\alpha}} &= A_{11}^{\hat{\alpha}} (x^1)^2 + (A_{22}^{\hat{\alpha}} - A_{11}^{\hat{\alpha}}) x^1 x^2 - A_{21}^{\hat{\alpha}} x^2 x^1; \\ \varphi_1: y^{\alpha} &= A_{33}^{\alpha} (x^3)^2 + (A_{44}^{\alpha} - A_{33}^{\alpha}) x^3 x^4 - A_{43}^{\alpha} (x^4)^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где величины $B_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}$ и $B_{\alpha\beta}^{\alpha}$ определяются по формулам и удовлетворяют в силу (1.5) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} &= \frac{1}{2} A_{(\alpha\beta)}^{\hat{\alpha}}, B_{\alpha\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} A_{(\hat{\alpha}\hat{\beta})}^{\alpha} = -B_{\alpha\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}, \\ dB_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} - B_{\beta\hat{\alpha}}^{\alpha} \omega_{\alpha}^{\beta} - B_{\alpha\hat{\beta}}^{\alpha} \omega_{\alpha}^{\hat{\beta}} + B_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} &= B_{\alpha\hat{\beta}}^{\alpha} \omega_{\beta}^{\hat{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Символом $T_i(x)$ будем обозначать касательное линейное подпространство к 1-семейству прямых z в направлении u , т.е. вдоль линии (A) , описываемой точкой A , с касательными u в точке A . Из (2.1) с учетом (1.1), (1.4), (1.5–1.7) и (2.2) получается следующая геометрическая интерпретация отображений f_α и φ_α ($\alpha = 1, 2$):

$$\begin{aligned} f_1: L_1^1 \rightarrow L_2^1 &\Leftrightarrow y = f_1(x) = L_2^1 \cap \{T_x(x) \cup L_1^1\}, x \in L_1^1; \\ \varphi_1: L_1^1 \rightarrow L_2^1 &\Leftrightarrow y = \varphi_1(x) = L_2^1 \cap \{T_{\hat{x}}(x) \cup L_1^1\}, \hat{x} \perp x, x \in L_1^1; \\ f_2: L_2^1 \rightarrow L_1^1 &\Leftrightarrow y = f_2(x) = L_1^1 \cap \{T_x(x) \cup L_2^1\}, x \in L_2^1; \\ \varphi_2: L_2^1 \rightarrow L_1^1 &\Leftrightarrow y = \varphi_2(x) = L_1^1 \cap \{T_{\hat{x}}(x) \cup L_2^1\}, \hat{x} \perp x, x \in L_2^1. \end{aligned}$$

Здесь в случае отображения $f_\alpha(\varphi_\alpha)$ прямая $x \in L_2^1(\hat{x} \in L_1^1)$ является касательной к линии (A) вдоль интегральной кривой распределения $\Delta_{2,4}^{\alpha}(\alpha = 1, 2)$.

2.2. Гармонические $f_{\alpha\alpha}$, $\varphi_{\alpha\alpha}$ и аналитические $f_{\alpha\alpha}$, $\varphi_{\alpha\alpha}$ отображения плоскостей L_1^1 и L_2^1

Из (2.1) следует, что каждое из отображений f_α , $\varphi_\alpha: L_2^1 \rightarrow L_1^1$, ($\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2$) в каждой точке $A \in E_4$ определяется двумя соответствующими функциями от двух аргументов с областью определения $L_2^1(\alpha \neq \beta)$. Каждая из пар указанных функций от двух аргументов в точках области определения могут удовлетворять условиям Коши-Римана [6. С. 75–76] или могут быть гармоническими функциями.

Определение 2.1. Отображение

$$\phi: H_2 \rightarrow H_2^* \Leftrightarrow y^q = \phi^q(x^p), \quad (p = 1, 2; q = 3, 4) \quad (2.3)$$

двумерных плоскостей H_2 и $H_2^*(A \in H_2, A \in H_2^*)$ называется:

1. гармоническим в точке $M(x^p) \in H_2$ или отображением $\phi(\phi \rightarrow \phi_r)$, если определяющие это отображение функции y^q являются гармоническими в этой точке;
2. аналитическим или отображением $\phi_a(\phi \rightarrow \phi_a)$, если функции y^q удовлетворяют условиям Коши-Римана в любой точке $M(x^p) \in H_2$.

Заметим, что функции (2.3) будут гармоническими в точке $M \in H_2$ тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\partial^2 y^q}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 y^q}{(\partial x^1)^2} = 0. \quad (2.4)$$

В соответствии с [6. С. 75–76] функции (2.3) удовлетворяют условиям Коши-Римана тогда и только тогда, когда во всех точках $M \in H_2$ выполняются соотношения:

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^1} = \frac{\partial y^4}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y^3}{\partial x^2} = -\frac{\partial y^4}{\partial x^1}. \quad (2.5)$$

Легко заметить, что из условий (2.5) в точке $M \in H_2$ вытекают условия (2.4). Этот факт известен в теории функций комплексного переменного: если функции комплексного переменного является аналитической, т.е. ее вещественная и мнимая части удовлетворяют в некоторой области условиям Коши-Римана, то эти функции являются гармоническими в этой области.

Из (2.4) и (2.5) в соответствии с определением 2.1 получаем условия гармоничности и аналитичности всех отображений (2.1). При этом следует иметь в виду, что если каждое отображение f_α или φ_α гармонично, то оно будет гармонично на всей плоскости L_1^1 или L_2^1 .

1. Гармонические отображения

$$\begin{aligned} f_{1r}: A_{11}^{\hat{\alpha}} + A_{22}^{\hat{\alpha}} &= 0; \varphi_{1r}: A_{12}^{\hat{\alpha}} - A_{21}^{\hat{\alpha}} = 0; \\ f_{2r}: A_{33}^{\alpha} + A_{44}^{\alpha} &= 0; \varphi_{2r}: A_{34}^{\alpha} - A_{43}^{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2. Аналитические отображения

$$\begin{aligned} f_{1a}: A_{11}^{\hat{\alpha}} + A_{22}^{\hat{\alpha}} &= 0, A_{12}^{\hat{\alpha}} + A_{21}^{\hat{\alpha}} - 2A_{22}^{\hat{\alpha}} = 0, A_{12}^{\hat{\alpha}} + A_{21}^{\hat{\alpha}} + 2A_{22}^{\hat{\alpha}} = 0; \\ \varphi_{1a}: A_{12}^{\hat{\alpha}} &= A_{21}^{\hat{\alpha}}, A_{11}^{\hat{\alpha}} - A_{22}^{\hat{\alpha}} + 2A_{12}^{\hat{\alpha}} = 0, A_{12}^{\hat{\alpha}} - A_{21}^{\hat{\alpha}} + 2A_{12}^{\hat{\alpha}} = 0; \\ f_{2a}: A_{33}^{\alpha} &= A_{44}^{\alpha}, A_{34}^{\alpha} + A_{43}^{\alpha} - 2A_{44}^{\alpha} = 0, A_{34}^{\alpha} + A_{43}^{\alpha} + 2A_{44}^{\alpha} = 0; \\ \varphi_{2a}: A_{34}^{\alpha} &= A_{43}^{\alpha}, A_{33}^{\alpha} - A_{44}^{\alpha} + 2A_{34}^{\alpha} = 0, A_{34}^{\alpha} - A_{43}^{\alpha} + 2A_{34}^{\alpha} = 0; \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\alpha = 1, 2$; $\hat{\alpha} = 3, 4$. Из (2.6) и (2.7) вытекают следующие утверждения:

- 1) $f_\alpha \rightarrow f_{\alpha\alpha} \Rightarrow f_\alpha \rightarrow f_{\alpha\alpha}$;
- 2) $\varphi_\alpha \rightarrow \varphi_{\alpha\alpha} \Rightarrow \varphi_\alpha \rightarrow \varphi_{\alpha\alpha}$;
- 3) $f_\alpha \rightarrow f_{\alpha\alpha}, \varphi_\alpha \rightarrow \varphi_{\alpha\alpha} \Rightarrow \varphi_\alpha \rightarrow \varphi_{\alpha\alpha}$;
- 4) $\varphi_\alpha \rightarrow \varphi_{\alpha\alpha}, f_\alpha \rightarrow f_{\alpha\alpha} \Rightarrow f_\alpha \rightarrow f_{\alpha\alpha}$.

Имеет место

Теорема 2.1. Отображение $\varphi_\alpha: L_2^1 \rightarrow L_1^1(\alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2)$ в каждой точке $M \in E_4$ является гармоническим, в смысле определения 2.1, тогда и только тогда, когда распределение $\Delta_{2,4}^{\alpha}(\alpha = 1, 2; \alpha - \text{фиксировано})$ голономно.

Доказательство этой теоремы вытекает из (2.6) и (1.8).

3. Геометрические свойства отображений

$$f_{\alpha\alpha}, \varphi_{\alpha\alpha}: L_2^1 \rightarrow L_1^1(\alpha \neq \beta)$$

В настоящем пункте будут выяснены геометрические свойства отображений $f_{\alpha\alpha}$ и $\varphi_{\alpha\alpha}$. Для опреде-

ленности подробнее остановимся для выяснения геометрических свойств указанных отображений при $\alpha = 1$. Геометрические свойства отображений при $\alpha = 2$ можно получить из геометрических свойств отображений при $\alpha = 1$ формальной заменой индексов $1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4$.

3.1. Прямые $q_2(z)$ и $\widehat{q}_2(z)$ в L_2^1 , отвечающие прямой $z \in L_2^1$

Точке $A \in E_4$ в плоскости L_2^1 поставим в соответствие прямую

$$z = (\bar{A}, \bar{e}_a) z^{\bar{a}}. \quad (3.1)$$

Из (2.1) с учетом (2.2) замечаем, что совокупность прямых $x = (\bar{A}, \bar{e}_a) z^{\bar{a}} \in L_2^1$, образы которых при отображениях $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^1$ и $\varphi_1: L_2^1 \rightarrow L_2^1$ ортогональны прямой (3.1), определяются уравнениями соответственно

$$q_2(z) = f_1(x) \Leftrightarrow z_{\bar{a}} B_{\bar{a}\beta}^{\bar{a}} x^{\alpha} x^{\beta} = 0, x^{\bar{a}} = 0, z_{\bar{a}} = z^{\bar{a}},$$

$$\widehat{q}_2(z) = \varphi_1(x) \Leftrightarrow z_{\bar{a}} \{A_{12}^{\bar{a}}(x^1)^2 + (A_{22}^{\bar{a}} - A_{11}^{\bar{a}})x^1 x^2 - A_{21}^{\bar{a}}(x^2)^2\} = 0, x^{\bar{a}} = 0, \quad (3.2)$$

$$(\alpha = 1, 2; \beta = 1, 2; \bar{\alpha}, \bar{\beta} = 3, 4).$$

Из (3.2) следует, что каждой прямой $z \in L_2^1$ в плоскости L_2^1 отвечают по две прямые $q_2(z) = f_1(x)$ и $\widehat{q}_2(z) = \varphi_1(x)$. Каждую из этих пар прямых в L_2^1 , проходящих через точку A , будем называть ассоциированными прямыми прямой $z \in L_2^1$ относительно соответствующего отображения f_1 или φ_1 .

Из (3.2) и (2.6) вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.1. Отображение $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^1$ ($\varphi_1: L_2^1 \rightarrow L_2^1$), отвечающее точке $A \in E_4$, является гармоническим отображением f_{1r} (φ_{1r}) тогда и только тогда, когда ассоциированные прямые $q_2(z)$ ($\widehat{q}_2(z)$) прямой $z \in L_2^1$ относительно отображения f_1 (φ_1) ортогональны друг другу при любом выборе прямой $z \in L_2^1$.

3.2. Фокусная прямая $K_2^1 \subset L_2^1$ и коника $K_2^2 \subset L_2^2$ вдоль интегральных кривых распределения $\Delta_{2,4}^1$

Пусть точки $X \in L_2^1$ и $Y \in L_2^2$ с радиус-векторами $\bar{X} = \bar{A} + x^{\bar{a}} \bar{e}_a$ и $\bar{Y} = \bar{A} + y^{\bar{a}} \bar{e}_a$ являются фокусами [7] вдоль фокальных интегральных кривых распределения $\Delta_{2,4}^1$. Тогда из

$$(d\bar{X}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0, (d\bar{X}, \bar{e}_3, \bar{e}_4) = 0, \omega^{\bar{a}} = 0$$

с учетом (1.1), (1.5) и (1.7) находятся уравнения двух фокусных прямых K_2^1 плоскости L_2^1 и фокусной коники $K_2^2 \subset L_2^2$:

$$K_2^1: a_{\bar{a}\bar{b}} x^{\bar{a}} x^{\bar{b}} = 0, x^{\bar{a}} = 0;$$

$$K_2^2: b_{\bar{a}\bar{b}} y^{\bar{a}} y^{\bar{b}} + 2b_{\bar{a}} y^{\bar{a}} + 1 = 0, y^{\bar{a}} = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= A_{11}^3 A_{12}^4 - A_{12}^3 A_{11}^4, \quad a_{22} = A_{21}^3 A_{22}^4 - A_{22}^3 A_{21}^4, \\ 2a_{12} &= A_{11}^3 A_{22}^4 + A_{21}^3 A_{12}^4 - A_{12}^3 A_{21}^4 - A_{22}^3 A_{11}^4, \\ b_{33} &= A_{11}^3 A_{22}^3 - A_{12}^3 A_{21}^3, \quad b_{44} = A_{11}^4 A_{22}^4 - A_{12}^4 A_{21}^4, \quad (3.4) \\ 2b_{34} &= A_{11}^3 A_{22}^4 + A_{11}^4 A_{22}^3 - A_{12}^3 A_{21}^4 - A_{12}^4 A_{21}^3, \\ 2b_{\bar{a}} &= -A_{11}^{\bar{a}} - A_{22}^{\bar{a}}. \end{aligned}$$

Теорема 3.2. Отображение $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2$, отвечающее точке $A \in E_4$, является отображением f_{1r} тогда и только тогда, когда точка $A \in E_4$ является центром коники $K_2^2 \subset L_2^2$.

Теорема 3.3. Если отображения $f_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2$, $\varphi_1: L_2^1 \rightarrow L_2^2$, отвечающие точке $A \in E_4$, являются отображениями f_{1r} , φ_{1r} , то фокусные прямые $K_2^1 \subset L_2^1$, ортогональны.

Доказательство теорем 3.2 и 3.3 вытекает из (3.3), (3.4) и (2.6).

Замечание 3.1. Геометрические свойства отображений $f_{\alpha\alpha}: L_2^{\alpha} \rightarrow L_2^{\beta}$ ($\alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2$) в каждой точке $A \in E_4$, а также существование этих отображений будет предметом особого рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. О двумерном многообразии центральных 2-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. — 2003. — Т. 306. — № 4. — С. 5–9.
- Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. — М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. — С. 7–246.
- Норден А.П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976. — 432 с.
- Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. — М., 1953. — Т. 2. — С. 275–382.
- Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1948. — 432 с.
- Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. — Томск: Томский государственный университет, 2002. — 510 с.
- Аквис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. — 1957. — № 1. — С. 9–19.